MAI 2 - domácí úkol ze cvičení 9 (základní pojmy u funkcí více proměnných)

1. Pokuste se rozhodnout, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

   b) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

2. „Mechanické" derivování.
   Vypočítejte parciální derivace 1. a 2.řádu všude, kde existují, funkcí:

   a) $f(x,y)=\exp(x^2-y-\frac{x}{y})$; b) $f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}$); c) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$;

   Zjistěte, kde jsou dané funkce diferencovatelné a určete v těchto bodech jejich diferenciál.

3. Základní „slovíčka":
   Je dána funkce f a bod (x_0,y_0) (a vyberte si) :

   i) $f(x,y)=4\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}$, $(x_0,y_0)=(0,-3)$

   ii) $f(x,y)=\arcsin\left(x^2-y\right)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$

   a) Najděte a načrtněte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce f v definičním oboru .
   b) Vypočítejte $\nabla f\left(x_0,y_0\right)$.
   c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0) a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f.
   d) Napište lineární aproximaci funkce $f\left(x,y\right)$ v okolí bodu (x_0,y_0).
   e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

4. Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\cong x+y$.

A můžete zkusit promyslet i trošku „hezčí" příklady (probereme na příštím cvičení):

1. Ukažte, že funkce $f\left(x,y\right)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x|\geq|y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.

   a) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;

   b) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   c) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.

   d) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.